

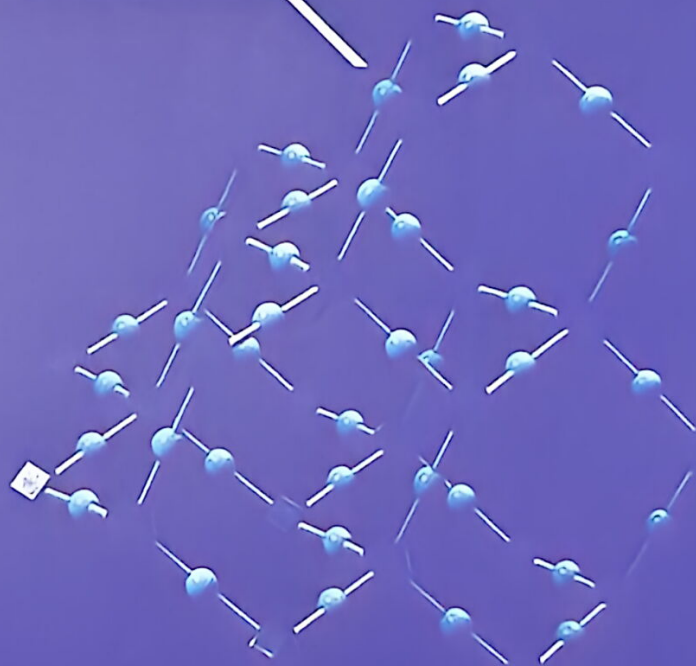
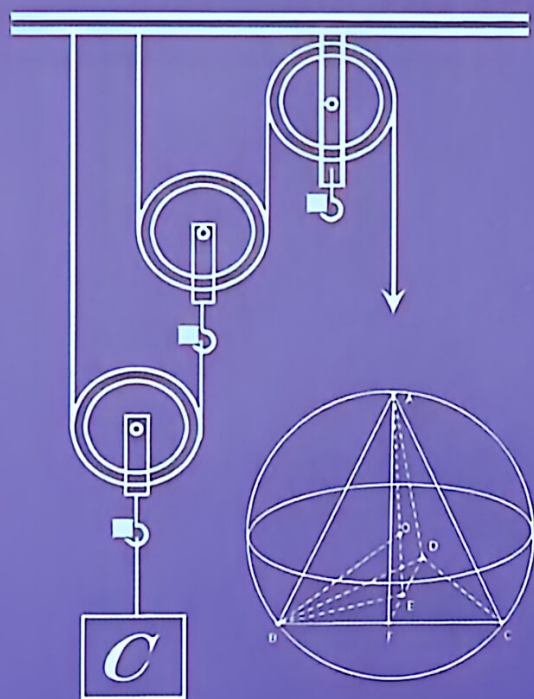
中国知网〈中国学术期刊(光盘版)〉全文收录
北京万方数据股份有限公司入选期刊
维普网〈中文科技期刊数据库〉全文收录
中国核心期刊(遴选)数据库全文收录
龙源期刊网全文收录
博看网全文收录
中小学图书馆馆配期刊

ISSN 1008-0333
CN 23-1413/G4

数理化 解题研究

Shu Li Hua Jieti Yanjiu

创新性 探索性 思想性 方法性



12月

2025年

第34期 总第671期



CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

数理化解题研究

Shu-Li-Hua Jieti Yanjiu

2025 年 第 34 期 总第 671 期

国际标准连续出版物号:ISSN 1008-0333

国内统一连续出版物号:CN 23-1413/G4

创刊时间:1997 年 12 月

主管单位:黑龙江出版传媒股份有限公司

主办单位:黑龙江报刊传媒集团有限公司

出版单位:《数理化解题研究》编辑部

社 长:张 磊

主 编:穆延博

联系电话:0451-84647368 18644063639

社 址:哈尔滨市道里区田地街 100 号

邮 编:150010

印刷单位:哈尔滨军诚印务有限公司

国内邮发代号:14-271

国内总发行:黑龙江省肇东市邮政局

定 价:30 元

投稿邮箱:shulihuajieti@126.com

出版日期:2025 年 12 月 10 日

编辑委员会

创 刊 人:李克柏

哈尔滨师范大学物理系教授(编审),中国物理教学研究会理事,黑龙江省科技期刊学会顾问,国家科技期刊奖获得者

编 委 会 主 任:张 磊

编 委 会 副 主 任:穆延博

编委会编委成员:

邱淑蕾	李春阳	颜卫东	唐 洵	贺凤梅	李春林	甘志国
李昌成	雷亚庆	杜红全	黄光鑫	许银伙	杨苍洲	蔡勇全
徐加华	郑 良	王苏文	朱贤良	蔡海涛	苏艺伟	侯 军
陶汉斌	许 文	杨天才	许冬保	刘 宇	李小蛟	张新中
王晓波	穆玉鹏	武增明	李秀元	杜海洋	钱 伟	郭公礼
董 强	王廷虎	胡贵平	刘海涛	林国红	熊高云	贾士伟
赵生武	卢惊涛	李 萍	张 宁	张金龙	裴 波	李鸿昌

目录 Contents

思路·方法·技巧

利用范德蒙行列式的一题多解激活学生发散思维

..... 王世杰(02)

构造距离巧求函数最值 林凤燕(06)

新型曲线的求解策略研究 李兆斌(09)

方格排列中的概率问题探究 崔星星(22)

“探究法”在数列新定义题中的应用 刘 君(31)

一道三角强基试题的多解探究 章 燕(35)

建立递推关系求解概率问题 王国华(73)

变量期望的性质巧解高考题 唐 文(77)

..... 裴彩荣(86)

..... 刘孝力(89)

物理动态问题中的临界分析法 朱亚飞(92)

高中物理非常规图像的处理技巧 田 沛(95)

巧用极限思维法破解高中力学临界问题 黄光凡(101)

气体变质量问题解题技巧探究 陈晓杏(104)

例谈解决追及相遇问题几种方法 王 尚(107)

从“万变”中寻求电学实验“不变”的考向 李 啸(110)

由一道电磁感应单杆试题引发的思考 黄 灿(113)

高考化学选择题中“陷阱”题型及破解技巧 唐 君(116)

高中化学反应热计算题易错点分析与教学对策

..... 李 婧(119)

高中化学实验探究题信息提取技巧——基于必修第二册

“硫及其化合物”教材实验拓展研究 黎 筱(122)

高中化学元素推断类试题解法突破 薛晓伟(133)

例析人类遗传系谱图题的“三步”解法

..... 邓少坡 袁 乐(142)

高考命题导向与研究

2025 年新高考 I 卷第 19 题的解法探究 胡兆亭(16)

筑基强本塑思维 合情推理探新知——以 2025 年全国

高考数学 I 卷 19 题为例 曹玉鹏(39)



妙用期望的性质巧解高考题

唐 文

(福建省福州市福州金山中学, 福建 福州 350000)

摘 要:文章针对利用定义法求解离散型随机变量期望时存在的思维难度大、易出错等问题,介绍了期望的可加性这一性质及其推论,并通过近两年的高考相关真题案例,展示了如何将复杂随机变量分解为服从两点分布的简单变量,进而利用期望的可加性简化计算过程、降低思维难度.

关键词:数学期望;期望的可加性;两点分布;高考题

中图分类号:G632

文献标识码:A

文章编号:1008-0333(2025)34-0077-03

随机变量的数学期望(均值)是高中数学的重要内容,也是高考的热门考点.一般来说,离散型随机变量 X 的数学期望可由定义($E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$)求解,其中 x_i 所对应的概率 p_i 是求期望的重点,也是学生学习的难点,他们在计算这部分内容时容易出现错误.

本文介绍一个期望的性质,能有效降低定义法求解期望的思维难度.

1 随机变量期望的性质

期望的可加性 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是随机变量,则 $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$.

推论 若随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 服从两点分布,且 $P(X_i) = p_i (i=1, 2, \dots, n)$,则得以下推论.若随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 服从两点分布,且 $P(X_i) = p_i (i=1, 2, \dots, n)$,则 $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n p_i$.

证明 因为 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 服从两点分布,且 $P(X_i) = p_i$,所以

$$E(X_i) = 1 \times p_i + 0 \times (1 - p_i) = p_i.$$

由期望的可加性,即得 $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = \sum_{i=1}^n p_i$.

随机变量期望的可加性是数学期望的基本性质之一,对任意随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 均成立.这一性质通过对复杂随机变量的分解运算降低了问题的复杂度,简化了计算过程,且凭借其普适性和高效性成为概率论中的基础工具之一^[1].

2 应用举例

例1 (2025年高考全国I卷第14题)有5个相同的球,分别以1,2,3,4,5标号,随机连续取3次,每次取1个球,每次取球后都放回.记 X 为这5个球中至少被取出1次的球的个数,则 X 的数学期望 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 本题基于有放回的摸球模型,难点在于能否理解“至少取出一次的球的个数”的含义.下面可通过列举三次取球的具体方式辅助理解:若三次取的球均为1号球,那么至少取出一次的球只有1号球,个数为1,所以 $X=1$;若三次取的球依次为1号球、2号球、2号球,那么至少取出一次的球有1号

收稿日期:2025-09-05

作者简介:唐文,本科,高级教师,从事高中数学教学研究.



球与2号球,个数为2,所以 $X=2$;若三次取的球依次为1号球、2号球、3号球,那么至少取出一次的球有1号球、2号球和3号球,个数为3.所以 $X=3$.

解法1 X 的可能取值为1,2,3.

从中有放回地随机取3次,每次取1个球,共有 $5^3=125$ 种情形.

(1)当 $X=1$ 时,一个球被取出3次,故有 C_5^1 种情形,所以 $P(X=1)=\frac{C_5^1}{125}=\frac{1}{25}$.

(2)当 $X=2$ 时,需要从5个球中取2个,其中一个球取出2次,且取出的3个球还有三种排法,故有 $C_5^2 C_2^1 C_3^1$ 种情形,所以 $P(X=2)=\frac{C_5^2 C_2^1 C_3^1}{125}=\frac{12}{25}$.

(3)当 $X=3$ 时,需要从5个球中取3个不同的球,且取出的3个球还有顺序,故有 A_5^3 种情形,所以 $P(X=3)=\frac{A_5^3}{125}=\frac{12}{25}$.

$$\text{综上, } E(X)=1 \times \frac{1}{25} + 2 \times \frac{12}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \frac{61}{25}.$$

解法2 设 X_k 表示 k 号球在三次抽取中至少被取出一次的事件,其中 $k=1,2,3,4,5$.

如果 k 号球至少被取出一次,则 $X_k=1$,

否则 $X_k=0$,即

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{若 } k \text{ 号球至少被取到一次,} \\ 0, & \text{若 } k \text{ 号球三次都未取到,} \end{cases} \quad k=1,2,3,4,5.$$

则至少被取出1次的球的个数 $X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$.

因为是有放回地取3次,每次取球时,取到 k 号球的概率为 $\frac{1}{5}$,取不到 k 号球的概率为 $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

于是3次取不到 k 号球的概率为

$$P(X_k=0)=\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}.$$

$$\text{则 } P(X_k=1)=1-P(X_k=0)=\frac{61}{125}.$$

由于 X_k 服从两点分布,从而

$$E(X_k)=P(X_k=1)=\frac{61}{125}.$$

由期望的可加性,得

$$E(X)=\sum_{k=1}^5 E(X_k)=5 \times \frac{61}{125}=\frac{61}{25}.$$

例1的推广 利用期望的可加性可以得到例1的推广.一个箱子里有 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 个一样的球,编号为 $1,2,\dots,n$.随机地连续抽取 $m(m \in \mathbf{N}^*)$ 次,每次取1个球,每次抽取后都放回,设随机变量 X 表示在这 m 次抽取中,至少被取出1次的球的个数,则 X 的数学期望 $E(X)=n[1-(1-\frac{1}{n})^m]$.

证明 引入随机变量 X_k ,令

$$X_k = \begin{cases} 1, & k \text{ 号球至少被取出一次,} \\ 0, & k \text{ 号球一次都没被取出,} \end{cases} \quad \text{其中 } k=1,2,\dots,n,$$

$$\text{则 } X=X_1+X_2+\dots+X_n.$$

因为是有放回地取 m 次,每次取球时,取到 k 号球的概率为 $\frac{1}{n}$,取不到 k 号球的概率为 $1-\frac{1}{n}$.

于是 m 次取不到 k 号球的概率为

$$P(X_k=0)=(1-\frac{1}{n})^m.$$

$$\text{则 } P(X_k=1)=1-(1-\frac{1}{n})^m.$$

由于 X_k 服从两点分布,从而

$$E(X_k)=P(X_k=1)=1-(1-\frac{1}{n})^m.$$

由期望的可加性,得

$$E(X)=\sum_{k=1}^n E(X_k)=n[1-(1-\frac{1}{n})^m].$$

例2 (2025年北京卷第18题)有一道选择题考查了一个知识点,甲、乙两校各随机抽取100人,甲校有80人答对,乙校有75人答对,用频率估计概率

(1)从甲校随机抽取1人,求这个人做对该题目的概率;

(2)从甲、乙两校各随机抽取1人,设 X 为做对的人数,求恰有1人做对的概率以及 X 的数学期望;

(3)若甲校同学掌握这个知识点则有100%的概率做对该题目,乙校同学掌握这个知识点则有85%的概率做对该题目,未掌握该知识点的同学都是从四个选项里面随机选择一个,设甲校学生掌握



该知识点的概率为 p_1 , 乙校学生掌握该知识点的概率为 p_2 , 试比较 p_1 与 p_2 的大小(结论不要求证明).

解析 (1) 从甲校随机抽取的 100 人中有 80 人做对, 做对的概率为 0.8.

(2) 根据题意, 甲校做对该题目的概率为 0.8, 乙校做对该题目的概率为 0.75.

于是恰有 1 人做对的概率为 $0.8 \times 0.25 + 0.75 \times 0.2 = 0.35$.

设 $X_1 = \begin{cases} 1, & \text{甲校学生答对题目,} \\ 0, & \text{甲校学生未答对题目,} \end{cases}$

$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{乙校学生答对题目,} \\ 0, & \text{乙校学生未答对题目,} \end{cases}$

则 $X = X_1 + X_2$.

因为 X_1, X_2 服从两点分布,

所以 $E(X_1) = 0.8, E(X_2) = 0.75$.

由期望的可加性, 得

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 0.8 + 0.75 = 1.55$.

(3) $p_1 < p_2$, 过程略.

例 3 (2024 年新课标全国 I 卷第 14 题^[2])

甲、乙两人各有四张卡片, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8, 两人进行四轮比赛, 在每轮比赛中, 两人各自从自己的卡片中随机选一张, 比较所选卡片上数字, 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片(弃置的卡片不能再使用). 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为_____.

解析 设四轮比赛后, 甲的总得分为 X , X_k 表示第 k 轮比赛甲的得分, 其中 $k = 1, 2, 3, 4$, 若甲的数字大, 则 $X_k = 1$, 否则 $X_k = 0$, 即 $X_k = \begin{cases} 1, & \text{甲的数字大,} \\ 0, & \text{甲的数字小,} \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, 4$, 则 $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

对于每一轮比赛, 总的出牌种数为 $4 \times 4 = 16$, 甲获胜的出牌的组合有六种, 分别为 3 与 2, 5 与 2, 5 与 4, 7 与 2, 7 与 4, 7 与 6. 所以甲每一轮比赛得 1 分的概率为 $P(X_k = 1) = \frac{6}{4 \times 4} = \frac{3}{8}$.

由于 X_k 服从两点分布,

所以 $E(X_k) = \frac{3}{8} (k = 1, 2, 3, 4)$.

由期望的可加性, 得 $E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 +$

$X_4) = \sum_{k=1}^4 E(X_k) = \sum_{k=1}^4 \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$.

记 $p_k = P(X = k) (k = 0, 1, 2, 3)$,

若甲得 0 分, 则只有一种情况, 甲出 1, 3, 5, 7 分

别对应乙出 2, 4, 6, 8. 所以 $p_0 = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{24}$.

若甲得 3 分, 则只有一种情况, 甲出 1, 3, 5, 7 分

别对应乙出 8, 2, 4, 6. 所以 $p_3 = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{24}$.

由 $\begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 = E(X) = \frac{3}{2}, \end{cases}$

解得 $p_1 = p_2 = \frac{11}{24}$, 故 $p_2 + p_3 = \frac{11}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$.

所以四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率

为 $p_2 + p_3 = \frac{1}{2}$.

3 结束语

由以上例子可以看出, 可加性作为数学期望的重要性质, 能帮助我们由局部走向整体, 实现化繁为简、避免繁琐的列举和复杂的概率计算, 从而为解题提供简洁高效的思路, 降低解题难度. 这种“分解变量—利用期望可加性”的解题思路, 不仅适用于高考真题, 还广泛适用于其他概率问题. 因此, 在解答与数学期望相关的问题时, 要重视可加性的应用, 若用期望的定义求解较困难, 可尝试利用可加性解答, 也可借助该性质验证定义法求答案的正确性.

参考文献:

- [1] 林国红. 期望的递推[J]. 高中数理化, 2025(05): 50-53.
- [2] 张昌全. 思维巧转向解题更轻松: 以 2024 年高考题为例[J]. 高中数理化, 2024(15): 13-16.

[责任编辑: 李慧娟]

— 79 —

