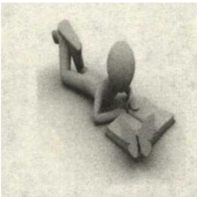


仅用无刻度直尺的作图

福建省福州 格致中学鼓山校区(350014)　林　静
金　山　中　学(350008)　杨勤春

尺规作图是指用无刻度直尺和圆规作图,它必须明确作图依据,了解作图步骤,是几何计算和推理的直观表现.如果两种工具(无刻度直尺和圆规)只剩下无刻度直尺,也能结合一些几何知识进行作图,笔者对此进行探究.

一、利用几何基本事实作图

例1 如图1,已知点A,B和直线l在同一平面内,从点A发射出的激光射线被点B处的障碍物阻挡,请作出点B在直线l的投影,并简述作图过程.

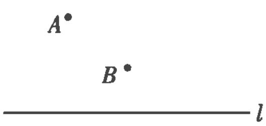


图1

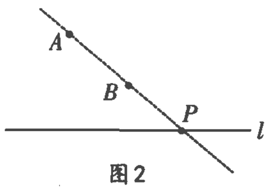


图2

【作法】 如图2,连接AB并延长交直线l于点P.则点P为所求.

【解析】 本题作图运用基本事实:两点确定一条直线.

例2 如图3,在直线l上寻找一点P,使点P到点A和点B的距离之和最短,并简述作图过程.

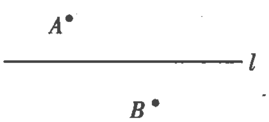


图3

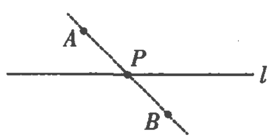


图4

【作法】 如图4,连接AB,交直线l于点P.则点P为所求.

【解析】 本题作图运用基本事实:两点之间,线段最短.

以上两题是利用几何基本事实进行作图,它可以作出直线和交点,也是最基本的无刻度直尺作图,这两个几何基本事实是其他无刻度直尺作图的依据.

二、利用图形的性质作图

例3 已知▱$ABCD$中,E是边AD的中点,请你仅用无刻度直尺(一把),完成下列作图,并简述作图过程.

(1)在图5(1)中,在BA的延长线上取一点F,使$AF=AB$;

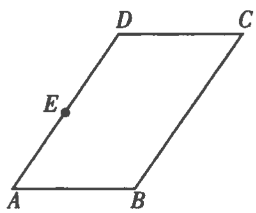


图5(1)

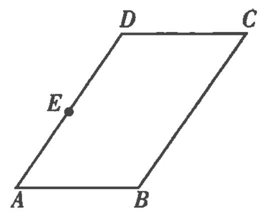


图5(2)

(2)在图5(2)中,作边BC的中点.

【作法】 (1)如图6(1),连接CE并延长,与BA延长线交于点F.则点F为所求.

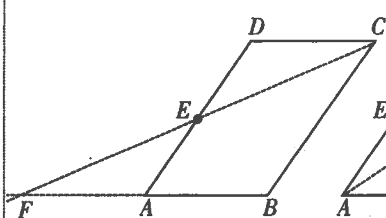


图6(1)

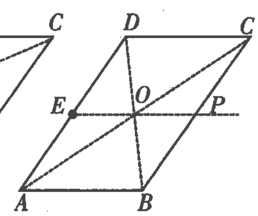


图6(2)

(2)如图6(2),连接AC,BD交于点O,连接EO并延长交BC于点P.则点P为所求.

【解析】(1)本小题应用了全等三角形的判定和性质,及平行四边形的性质,由$DC//AB$,得$\angle D=\angle EAF$,$\angle DCE=\angle AFE$,又因为$AE=DE$,得到$\triangle DEC\cong\triangle AEF$,因此$AF=DC=AB$.

(2)本小题借助平行四边形对角线互相平分,连接AC,BD交于点O,连接EO并延长,交BC于点P.由于E,O是AD,AC的中点,所以$EO//DC$,又因为$AD//BC$,所以四边形$CDEP$是平行四边形,从而得到$CP=DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$,所以$P$是$BC$的中点.

例4 如图7,在网格中,请你仅用无刻度直尺,画出$\angle AOB$的平分线,并简述作图过程.

【作法】 如图8,取点P,作射线OP.则射线OP为

所求.

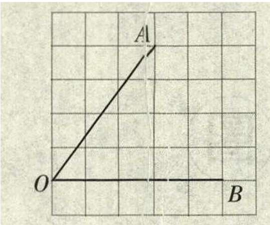


图7

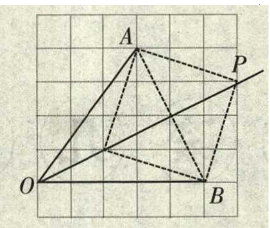


图8

【解析】 本题运用了勾股定理,三角形全等的判定和性质. 由勾股定理,$OA=OB$. 利用网格的特点,找到一个点P,使$PA=PB$,可证$\triangle OAP\cong\triangle OBP$,从而确定射线OP为$\angle AOB$的平分线. 值得一提的是,本题中$\angle AOB$平分线上的点$P$可以有三个位置可选.

例5 如图9,在半圆中有一点P,请你仅用无刻度直尺,过点P作直径AB的垂线,并简述作图过程.

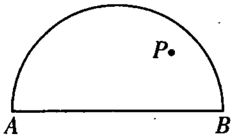


图9

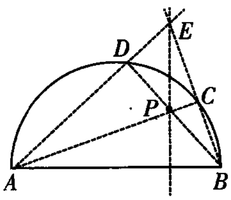


图10

【作法】 如图10,连接AP,BP并延长,与半圆分别交于点C,D.连接AD,BC并延长交于点E,作直线EP. 则直线EP为所求.

【解析】 本题考查了圆的直径所对的圆周角是直角和三条高线相交于一点. 连接AP并延长,交半圆于点C,连接BP并延长交半圆于点D. 因为AB是半圆的直径,所以$\angle ACB=\angle ADB=90°$. 延长$AD$,$BC$交于点$E$,此时在$\triangle ABE$中,线段$AC$,$BD$均为$\triangle ABE$的高,且都过点$P$,所以点$P$是$\triangle ABE$的垂心. 则直线$EP$为所求.

以上例题是在几何基本事实的基础上结合几何图形的性质进行作图,综合考查了学生对几何图形性质的掌握情况.

三、利用图形的变化作图

例6 如图11,矩形$ABCD$中,E,F是AD,BC的中点,请你仅用无刻度直尺在EF上作出一个三等分点,并简述作图过程.

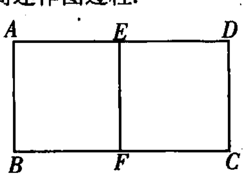


图11

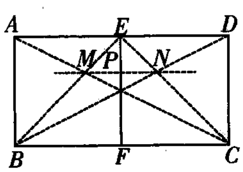


图12

【作法】 如图12,连接AC,BE交于点M,连接BD,EC交于点N,连接MN交EF于点P.则点P为所求.

【解析】 本题运用矩形和相似的相关性质. 利用中点E,通过$\triangle AME\backsim\triangle CMB$的相似比为1:2,可以确定对角线$AC$的三等分点$M$的位置,同理确定$BD$的三等分点$N$.连接$MN$交$EF$于点$P$,通过相似可以得到$\frac{EP}{EF}=\frac{1}{3}$,即$P$是$EF$的三等分点.

例7 如图13,$AB=AE$,$BC=ED$,$\angle B=\angle E$. 请你仅用无刻度直尺,作出线段CD的垂直平分线,并简述作图过程.

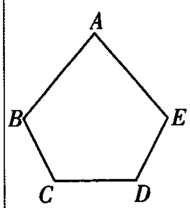


图13

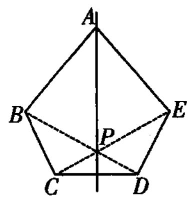


图14

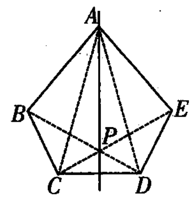


图15

【作法】 如图14,连接BD,CE交于点P,作直线AP. 则直线AP为所求.

【解析】 如图15,由题意得$\triangle ABC\cong\triangle AED$,所以$AC=AD$,$\angle ACB=\angle ADE$,进而得到$\angle BCD=\angle EDC$. 连接$BD$,$CE$,可得$\triangle BCD\cong\triangle EDC$,故有$\angle BDC=\angle ECD$,所以$PC=PD$. 又因为$AC=AD$,所以直线$AP$是线段$CD$的垂直平分线.

例8 如图16,以锐角$\triangle ABC$的边AB,AC为边向外做等边三角形ABD和等边三角形ACE,请你仅用无刻度直尺,找到$\triangle ABC$中的一个点P,使得$PA+PB+PC$的值最小,并简述作图过程.

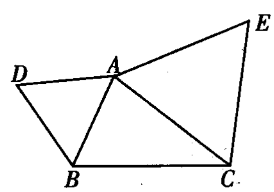


图16

【作法】 如图17,连接CD,BE交于点P. 则点P为所求.

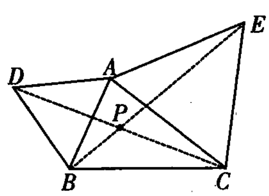


图17

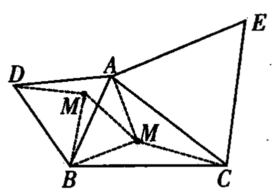
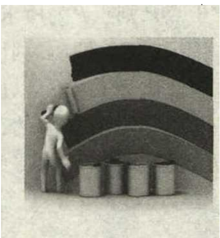


图18

【解析】 本题属于综合性较强的分析作图题,解题思路复杂,但是作法简单,对于思考的过程,包含了旋转和手拉手模型. 如图18,在$\triangle ABC$中存在一点M,连接MA,MB,MC,将$\triangle MAB$绕点B逆时针旋转60°,



例谈硬币能滚几圈

陕西省勉县勉阳初级中学 (724200)　蔡正涛　蔡天

在北师大版《数学》九年级下册“圆”一章中两次出现硬币的滚动问题,从而得出圆心移动的距离与圆滚动圈数密切相关.在能力拓展方面进一步探讨圆在折线上、圆弧上作无滑动地滚动的圈数的计算,这种题很有趣,但是学生做起来不是很容易,有点难掌握.现结合具体谈谈我们的一点认识.

问题:一个半径为r的硬币沿直线滚动一周,圆心移动的距离是多远?

如图1所示:圆滚动一圈,圆心移动的距离为圆滚动一圈长度即圆的周长,也就是说圆心移动的距离与圆滚动圈数密切相关.

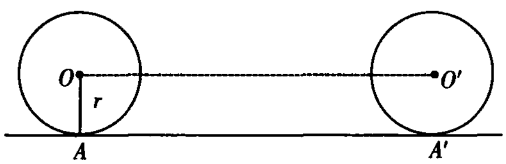


图1

如果一个圆在折线上作无滑动地滚动,则圆心移动的距离又怎样计算?圆滚动的圈数又怎样计算?

假定一个半径为r的硬币,沿一段直线向前滚动,它在和圆周周长相同的线段AB上恰好转了一圈,现在我们将这条线段在它的中点C处转折,折向和原来方向成α角的位置(α为弧度角).

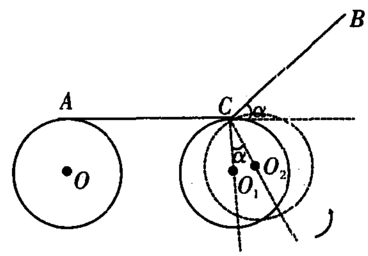


图2

如图2所示,硬币在转了半圈以后,就到了顶点C,要转到线段CB上去,此时圆连同它的圆心自转了一个角$\angle O_1CO_2$.由于$O_1C\perp AC$,$O_2C\perp BC$,因而有$\angle O_1CO_2=\alpha$.在转弯过程中,硬币并不沿直线移动,而是产生了沿此直线滚动多出来的自转,旋转角恰好等于α角,因而硬币在拐弯处自身滚动了$\frac{\alpha r}{2\pi r}=\frac{\alpha}{2\pi}$圈($\alpha$为弧度角),最后硬币又在线段$BC$上转了半圈,到达$B$点.即硬币共转了($\frac{\alpha}{2\pi}+1$)圈.

当一个硬币在凸多边形的外边上滚动时,滚动一周的圈数,应比硬币在与多边形周长相同的线段上滚动圈数多一圈,这是因为任何一个凸多边形外角和等于2π(π为弧度角),即硬币在所有拐弯处自身共转动

(接上页)则AB与DB重合,得到$\triangle M'BD$,$MB=M'B$,$MA=M'D$,$\angle MBM'=60°$.连接MM',便有$\triangle MM'B$为等边三角形,$MM'=MB$.因此$MA+MB+MC$的最小值就转化成$M'D+MM'+MC$的最小值.当点D,M,M',C四点共线时,$MA+MB+MC$取最小值,进而可以理解为,若要使$MA+MB+MC$取最小值,则点M在线段CD上.同理,若要使$MA+MB+MC$取最小值,则点M在线段BE上.即线段CD和BE的交点P.

以上3道例题在作图的过程中充分利用轴对称、旋转、相似等图形的变化,化繁为简,而简中见繁,即简单的作法包含大量的道理,能将其分析出来,可体现学生的综合能力,作图与分析过程让几何的魅力愈发明显.

没有了圆规的辅助,仅用无刻度直尺作图更能体现对几何知识的掌握和运用,它融合更多的知识层面和能力层面的思考;工具方便、操作简单,却更体现了思维的逻辑性,知识的连贯性,能力的综合性,更有利于发展学生直观想象和逻辑推理等数学能力.